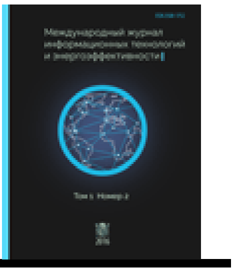
Подгорнов М.Д. Модель системы массового обслуживания «ТОЧНО-В-СРОК» с многоэтапным обслуживанием // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. – 2025. – Т. 10 № 4(54) с. 129–134

ОТКРЫТАЯ НАУКА
издательство

Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности

Сайт журнала: http://www.openaccessscience.ru/index.php/ijcse/



УДК 004.942

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ «ТОЧНО-В-СРОК» С МНОГОЭТАПНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Подгорнов М.Д.
ФГБОУ ВО "УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ", Ульяновск, Россия, (432017, Ульяновская область, город Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), e-mail: maksimka_7373@mail.ru

В работе развивается семимартингальный (траекторный) подход к математическому описанию и моделированию систем массового обслуживания (СМО) «точно-в-срок». Рассмотрена модель СМО «точно-в-срок» с многоэтапным обслуживанием заявок. Построена математическая модель. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым проводится имитационное моделирование.

Ключевые слова: Система массового обслуживания, семимартингальное описание, точно-в-срок, многоэтапное обслуживание, точечный процесс, компенсатор, имитационное моделирование.

THE JUST-IN-TIME QUEUING SYSTEM MODEL WITH PHASED SERVICE

Podgornov M.D.
ULYANOVSK STATE UNIVERSITY, Ulyanovsk, Russia, (432017, Ulyanovsk region, Ulyanovsk city, Lva Tolstoy str., 42), e-mail: maksimka_7373@mail.ru

The paper develops a semi-martingale (trajectory) approach to the mathematical description and modeling of just-in-time queuing systems. The queuing system models with phased service is considered. A mathematical model is constructed. The transition from a mathematical model to iterative formulas, which are used for simulation, is shown.

Keywords: Queuing System, system, semi-martingale description, just-in-time, phased service, point process, compensator, simulation modeling.

Введение

Современные условия ведения бизнеса требуют от компаний высокой эффективности и гибкости в организации процессов обслуживания клиентов. Одной из наиболее актуальных концепций в этой области является модель системы массового обслуживания (СМО) «точно-в-срок», также известная как JIT (just-in-time), которая акцентирует внимание на своевременном предоставлении услуг и минимизации временных затрат в процессе обслуживания (см., к примеру, работы [1-2]).

Многоэтапное обслуживание представляет собой стратегию, при которой процессы делятся на несколько последовательных этапов, что позволяет более эффективно управлять потоками клиентов и ресурсами предприятия.

На сегодняшний день математические и, в частности, стохастические модели систем массового обслуживания точно-в-срок развиты крane слабо. Этот факт придает описанию и моделированию подобных систем особую значимость, поскольку область их применения крайне широка. Целью работы является разработка стохастического описания СМО «точно-в-срок» с многоэтапным обслуживанием, подходящего как для аналитических методов, так и для компьютерного моделирования.

Для математического описания СМО использован аппарат точечных (считающих) процессов и их компенсаторов. С данным траекторным подходом при описании СМО можно ознакомиться, например, по работам [3-5].

Постановка задачи

Рассмотрим одноканальную СМО, в которую поступают заявки одного типа. Интенсивность поступления заявок определяется параметром $\lambda > 0$. С момента начала обслуживания заявки, оператор должен завершить ее обработку за определенный отрезок времени, определяемый параметром $\tau_1 > 0$, или, говоря иначе, точно-в-срок. После завершения обслуживания у первого оператора заявка отправляется ко второму оператору, который также должен обслужить её за определённое время, определяемое параметром $\tau_2 > 0$. Для заявок, которые поступают на обслуживание в момент времени, когда операторы заняты организованы бесконечные очереди (Рисунок 1).

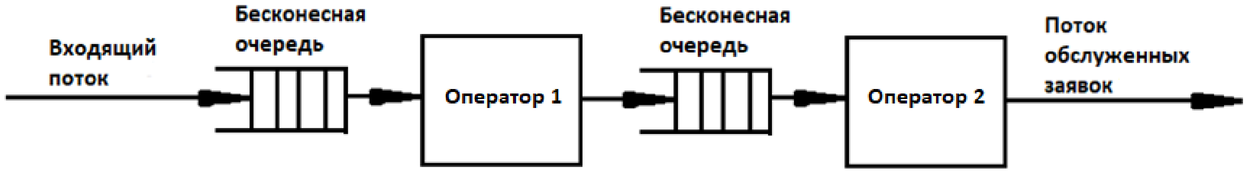


Рисунок 1 - Схема СМО

Математическая модель

Для описания работы системы введем считающие процессы A^1, A^2, D, где $A^1 = (A_t^1)_{t\geq0}$ – число заявок, поступивших в СМО за время $t \geq 0$, $A_0^1 = 0$, $A^2 = (A_t^2)_{t\geq0}$ – число заявок, обслуженных первым оператором и поступивших на обслуживание ко второму за время $t \geq 0$, $A_0^2 = 0$, $D = (D_t)_{t\geq0}$ – число полностью обслуженных заявок в СМО за время $t \geq 0$, $D_0 = 0$. Точечные процессы A^1, A^2 и D определяются своими компенсаторами $\widetilde{A^1} = (\widetilde{A_t^1})_{t\geq0}$, $\widetilde{A^2} = (\widetilde{A_t^2})_{t\geq0}$ и $\widetilde{D} = (\widetilde{D}_t)_{t\geq0}$ [4]:

$$A_t^1 = \widetilde{A_t^1} + m_t^{A^1}, \tag{1}$$

$$A_t^2 = \widetilde{A_t^2} + m_t^{A^2}, \tag{2}$$

$$D_t = \widetilde{D}_t + m_t^D, \tag{3}$$

где $\widetilde{A^1}, \widetilde{A^2}$ и $\widetilde{D}$ — неубывающие предсказуемые процессы, $m_t^{A^1}$, $m_t^{A^2}$ и m^D — мартингалы.

Для системы, рассматриваемой в данной работе, компенсатор процесса $A^1 = (A_t^1)_{t\geq0}$ будет иметь следующий вид:

$$\widetilde{A_t^1} = \lambda t,\ \lambda > 0, \tag{4}$$

где $\lambda > 0$ — интенсивность поступления заявок.

Компенсаторы для процессов $A^2 = (A_t^2)_{t\geq 0}$ и $D = (D_t)_{t\geq 0}$ определяются соотношениями:

$$\widetilde{A_t^2} = \int_0^t \mu_s^1 \; ds\,, \tag{5}$$

$$\widetilde{D}_t = \int_0^t \mu_s^2 \; ds\,, \tag{6}$$

где μ_t^1 и μ_t^2 – интенсивности обслуживания первого и второго операторов соответственно. Определять их будем следующими соотношениями:

$$\mu_t^1 = \frac{1}{t_t^{o1} - t} \cdot I(t_t^{o1} > 0), \tag{7}$$

$$\mu_t^2 = \frac{1}{t_t^{o2} - t} \cdot I(t_t^{o2} > 0). \tag{8}$$

Здесь $I(\cdot)$ – индикаторная функция, t_t^{o1} – время, к которому первый оператор стремиться завершить обработку текущей заявки. Аналогично, t_t^{o2} – время, к которому стремиться закончить обработку текущей заявки второй оператор. Отметим, что в любой момент времени $t \geq 0$, μ_t^1, $\mu_t^2 \geq 0$.

Опишем уравнение изменения t_t^{o1} . Оно будет иметь следующий вид:

$$dt_t^{o1} = (t + \tau_1) \cdot I(A_t^1 - A_t^2 = 0)dA_t^1 + (t + \tau_1 - t_t^{o1}) \cdot I(q_t^1 > 0)dA_t^2 - \\ -t_t^{o1} \cdot I(q_t^1 = 0)dA_t^2, \tag{9}$$

где q_t^1 – количество заявок в очереди в момент времени $t \geq 0$, $q_0^1 = 0$. Для параметра q_t^1 можно написать следующее балансовое уравнение:

$$dq_t^1 = I(A_t^1 - A_t^2 > 0)dA_t^1 - I(q_t^1 > 0)dA_t^2, \tag{10}$$

т.е. очередь будет увеличивается на единицу, если в момент прихода новой заявки $(dA_t^1 = 1)$ оператор занят, и уменьшаться на единицу, если в момент окончания обслуживания текущей заявки $(dA_t^2 = 1)$ очередь не пуста$(q_t^1 > 0)$.

Логика построения уравнения (9) такова. Во-первых, параметр t_t^{o1} принимает значение равное сумме текущего значения времени и параметра τ_1, если в момент прихода новой заявки $(dA_t^1 = 1)$ оператор свободен, либо если в момент окончания обслуживания текущей заявки $(dA_t^2 = 1)$ в очереди находятся заявки $(q_t^1 > 0)$. Во-вторых, обнуляется, если в момент окончания обслуживания текущей заявки $(dA_t^2 = 1)$ очередь пуста $(q_t^1 > 0)$.

Балансовые уравнения для t_t^{o2} и q_t^2 будут иметь аналогичную логику построения:

$$dt_t^{o2} = (t + \tau_2) \cdot I(A_t^2 - D_t = 0)dA_t^2 + (t + \tau_2 - t_t^{o2}) \cdot I(q_t^2 > 0)dD_t - \\ -t_t^{o2} \cdot I(q_t^2 = 0)dD_t, \tag{11}$$

$$dq_t^2 = I(A_t^2 - D_t > 0)dA_t^2 - I(q_t^2 > 0)dD_t, \tag{12}$$

Итерационные формулы

Выведем формулы, необходимые для имитационного моделирования СМО. На стохастическом базисе $B = (\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ из формул (1)-(12) можно получить следующие инфинитезимальные соотношения:

$$P\{A_{t+\Delta}^1 - A_t^1 = 1|\mathcal{F}_t\} = \lambda \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{13}$$

$$P\{A_{t+\Delta}^2 - A_t^2 = 1|\mathcal{F}_t\} = \mu_t^1 \cdot \Delta + o(\Delta), \tag{14}$$

$$P\{D_{t+\Delta} - D_t = 1|\mathcal{F}_t\} = \mu_t^2 \cdot \Delta + o(\Delta). \tag{15}$$

Формулы (13)-(15) позволяют, основываясь на понятии геометрической вероятности, провести имитационное моделирование. А именно, введя дискретизацию (шаг по времени) Δ из условия $\lambda \cdot \Delta \ll 1$, $\mu_t^1 \cdot \Delta \ll 1$, $\mu_t^2 \cdot \Delta \ll 1$ получим следующие итерационные формулы (для вычисления значений процессов в момент времени $t + \Delta$ через значения процессов в момент t):

$$A^1_{t+\Delta} = A^1_t + \delta(\lambda), \tag{16}$$

$$A^2_{t+\Delta} = A^2_t + \delta(\mu^1_t), \tag{17}$$

$$D_{t+\Delta} = D_t + \delta(\mu^2_t), \tag{18}$$

где $\delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \gamma \cdot \Delta, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \cdot \Delta. \end{cases}$

Оставшиеся параметры вычисляем следующим образом:

$$q^1_{t+\Delta} = q^1_t + I(A^1_t - A^2_t > 0)\Delta A^1_t - I(q^1_t > 0)\Delta A^2_t, \tag{19}$$

$$t^{o1}_{t+\Delta} = t^{o1}_t + (t + \tau_1) \cdot I(A^1_t - A^2_t = 0)\Delta A^1_t + (t + \tau_1 - t^{o1}_t) \cdot I(q^1_t > 0)\Delta A^2_t - \\ - t^{o1}_t \cdot I(q^1_t = 0)\Delta A^2_t \quad , \tag{20}$$

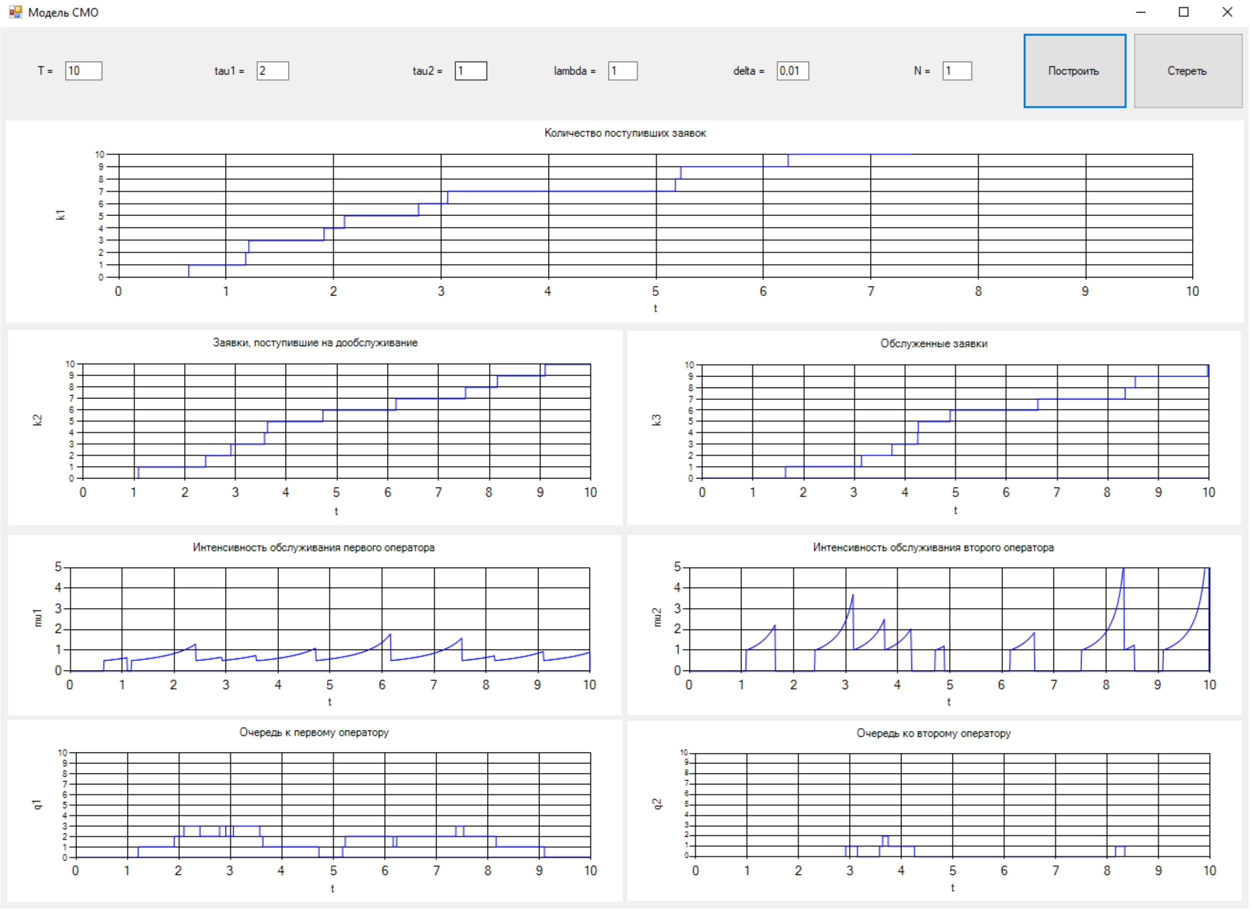
$$q^2_{t+\Delta} = q^2_t + I(A^2_t - D_t > 0)\Delta A^2_t - I(q^2_t > 0)\Delta D_t, \tag{21}$$

$$t^{o2}_{t+\Delta} = t^{o2}_t + (t + \tau_2) \cdot I(A^2_t - D_t = 0)\Delta A^2_t + (t + \tau_2 - t^{o2}_t) \cdot I(q^2_t > 0)\Delta D_t - \\ - t^{o2}_t \cdot I(q^2_t = 0)\Delta D_t \quad . \tag{22}$$

Здесь $\Delta A^1_t = A^1_{t+\Delta} - A^1_t,\ \Delta A^2_t = A^2_{t+\Delta} - A^2_t,\ \Delta D_t = D_{t+\Delta} - D_t$.

Результаты компьютерного моделирования

Практическая реализация СМО осуществлена с помощью языка программирования высокого уровня C# в среде разработки Visual Studio 2022. На Рисунке 2 представлен результат моделирования систем при параметрах $\tau_1 = 2,\ \tau_2 = 1,\ \lambda = 1$ и времени моделирования $T = 10$.



T = 10
tau1 = 2
tau2 = 1
lambda = 1
delta = 0,01
N = 1

Рисунок 2 - Модель СМО

Результаты моделирования показывают, что система корректно справляются с поставленными задачами, операторы обрабатывают заявки точно в срок.

Заключение

В результате выполнения данной работы была построена математическая модель системы массового обслуживания «точно-в-срок» с многоэтапным обслуживание в семимартингальных терминах. Показан переход от математической модели к итерационным формулам, по которым было проведено имитационное моделирование.

Список литературы

1. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физикоматематические науки. 2018, т. 22, №. 3, с. 518-531.
2. Бутов А.А. Оценивание параметров распределенных продуктивных систем, работающих по принципу «точно в срок» // Автомат. и телемех. 2020, № 3, с.14–27.
3. Бородин А.Н. Случайные процессы: Учебник. Спб.: Изд-во «Лань», 2013.
4. Бутов, А.А. Теория случайных процессов и её дополнительные главы: учеб. пособие. Ч. 1. Введение в стохастическое исчисление. Ульяновск : УлГУ, 2016

5. Бутов, А.А. Теория случайных процессов и её дополнительные главы: учеб. пособие. Ч. 2. Случайное блуждание, винеровский процесс, стохастический интеграл, диффузионные процессы. Ульяновск : УлГУ, 2021

References

1. Butov A.A., Kovalenko A.A. Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences. 2018, vol. 22, No. 3, pp. 518-531.
2. Butov A.A. Estimation of parameters of distributed productive systems operating on the principle of "just in time" // Automaton. and telemech. 2020, No. 3, pp.14-27.
3. Borodin A.N. Random processes: Textbook. St. Petersburg: Publishing house "Lan", 2013.
4. Butov, A.A. Theory of Random Processes and Its Additional Chapters. allowance. Part 1. Introduction to Stochastic Calculus. Ulyanovsk : Ulyanovsk State University, 2016
5. Butov, A.A. Theory of Random Processes and Its Additional Chapters. allowance. Part 2. Random walk, Wiener process, stochastic integral, diffusion processes. Ulyanovsk : Ulyanovsk State University, 2021